



TITLE:

細長い物体のおそい運動に対する
壁の影響 (流体力学における混合境
界値問題)

AUTHOR(S):

成瀬, 文雄

CITATION:

成瀬, 文雄. 細長い物体のおそい運動に対する壁の影響 (流体力学にお
ける混合境界値問題). 数理解析研究所講究録 1978, 335: 42-67

ISSUE DATE:

1978-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104204>

RIGHT:

細長い物体のおそい運動に対する壁の影響

東大 生研 成瀬文雄

§ 1 あらまし

細長い物体のおそい運動に対する壁の影響について、つぎの仮定で研究する。 1. 基礎方程式はストークス方程式、 2. 物体の形は任意で、代表的長さを l とする。 3. 物体の断面の形は任意で (円への寫像関数が既知)、その代表的長さを b とする。 4. 壁として無限に続く一枚の平面壁を考へる。 5. 物体の速度 $U_0(t)$ はストークス近似を許す範囲内で自由に与えられているとする。また物体がなりのときの速度 $U(r)$ 、圧力 $P(r)$ はストークス方程式をみたす範囲内で自由に与えられているとする。ここで r は物体の中心線に沿って基準点から測った長さであり、 r は位置ベクトルである。 6. $K (= b/l) \ll 1$ を仮定する。

以上のような仮定のもとに、流れの場を支配する積分方程式を導出する。この積分方程式は一般の場合には $\varepsilon = (\log K)^{-1}$

による展開の形で与えられる。特別の場合には厳密解が存在し、その解は $O(k)$ と無視する範囲内でストークス方程式の解と一致する。ここで d は壁から物体までの代表的距離である。この積分方程式の厳密解が存在する場合として、断面が一樣であるリングの運動と微小な生物の平面波動運動の二つの場合が与えられる。

細長い物体のおよそ運動に対する壁の影響については、断面が円である直線状物体の場合には Mestha¹⁾、Katz, Blake と Pavoni-Fontana²⁾ によって研究されているが、いずれも ε による展開の形で与えられ、一枚の壁に平行に動く場合には $O(\varepsilon^3)$ の精度まで、二枚の平行平板間の中心面上で動く場合には $O(\varepsilon^2)$ の精度まで解が得られている。

また微小な生物の平面波動運動の壁効果については、A.J. Reynolds³⁾、D.F. Katz⁴⁾ などによって研究されているが、いずれも細長い物体ではなく、無限に続く薄いシート状物体の波動運動に対する研究である。

本稿の研究は上記文献と比較して、(i) 求められている解が積分方程式の厳密解であるから、解の精度が高い。(ii) リングに対する壁効果はこれまで研究されておらず、(iii) 物体の断面の形が任意の形でよい、なにより特徴がある。

§ 2 壁があるときの積分方程式

いま無次元変数として

$$\eta = \eta^* / U_0, \quad r = r^* / l, \quad p = p^* l / \mu U_0. \quad (1)$$

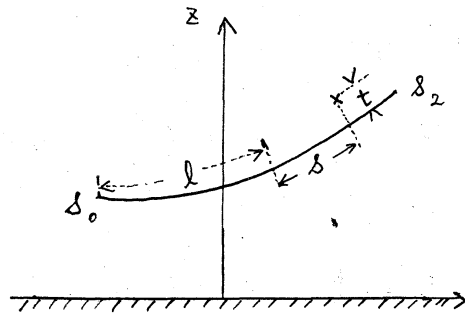
をえらぶとき、ストークス方程式は

$$\Delta \eta - \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot \eta = 0 \quad (2)$$

となる。また境界条件はつぎのようになる。

$$\text{物体上} : \quad \eta = U_0(\delta) \quad (3)$$

$$\text{物体がないとき} : \quad \eta = U(r), \quad p = P(r) \quad (4)$$



第 1 図

第 1 図の如く座標系をえら

ぶ。いま考えている点から物
体までの最短距離を t^* とし、

$$t = t^* / l, \quad \bar{t} = t^* / b \quad (5)$$

で定義される t, \bar{t} を導入す

るとき、 $t \sim O(1)$ となる領域

が外部領域となり、また $\bar{t} \sim O(1)$ となる領域が内部領域とな
る。

壁があるときには、壁がないときと同種の運動と比較して、
外部解に特徴があるから、外部変数 $r = r^* / l$ とし、外部解を
つぎの形で表わす。

$$\eta = U(r) - \int_{\delta_0}^{\delta_2} C(\delta) \left\{ \frac{R'(\delta)}{R} + \frac{(R \cdot \delta(\delta)) R}{R^3} \right\} d\delta + \eta''(r), \quad (6)$$

$$p = P(r) - 2 \int_{\delta_0}^{\delta_2} c(s) \frac{(\mathbf{l}'(s) \cdot \mathbf{R}(s))}{R^3} ds + P'(r) \quad (17)$$

ここで $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_B(s)$ で、 $\mathbf{R}_B(s)$ は座標原点と ds を結ぶベクトルである。(16), (17) の第1項は物体がなるとき場の速度、圧力を表わし、第2項は s 上に強さ、方向とも未定のストークス源 $c(s) \mathbf{l}'(s)$ を分布させたときに誘起される速度及び圧力であり、第3項は第2項のストークス源の分布から生ずる壁の上での速度を打消して壁の上での境界条件を満足するためのに付加した関数で、勿論ストークス方程式を満足して r の速度及び圧力である。

ここでストークス源の方向分布 $\mathbf{l}'(s)$ を

$$\mathbf{l}'(s) = l'(s) \mathbf{e}_x + m'(s) \mathbf{e}_y + n'(s) \mathbf{e}_z, \quad (8)$$

($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は x, y, z 方向の単位ベクトル)

の如く表わすとき、 $q_b''(r)$ の x, y, z 成分 (u'', v'', w'') は以下の形となる。

$$u'' = \int_{\delta_0}^{\delta_2} c(s') \left[l'(s') \left\{ \frac{1}{R'} + \frac{(x-x')^2 + 2zz'}{R'^3} - \frac{6(x-x')^2 zz'}{R'^5} \right\} + m'(s') (x-x')(y-y') \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{6zz'}{R'^5} \right) + n'(s') (x-x') \left\{ \frac{z-z'}{R'^3} + \frac{6zz'(z+z')}{R'^5} \right\} \right] ds' \quad (9)$$

$$v'' = u'' \quad (l' \leftrightarrow m', x \leftrightarrow y, x' \leftrightarrow y') \quad (10)$$

$$w'' = \int_{s_0}^{s_2} C(s') \left[l'(s') (x-x') \left\{ \frac{z-z'}{R'^3} - \frac{6zz'(z+z')}{R'^5} \right\} + m'(s') (y-y') \left\{ \frac{z-z'}{R'^3} - \frac{6zz'(z+z')}{R'^5} \right\} \right. \\ \left. + n'(s') \left\{ \frac{1}{R'} + \frac{2z^2}{R'^3} - \frac{(z+z')(z-z')}{R'^3} + \frac{6zz'(z+z')^2}{R'^5} \right\} \right] ds' \quad (11)$$

ここで (x, y, z) は Π の x, y, z 成分、 (x', y', z') は s' を示すベクトルの x, y, z 成分、

$$R' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$$

である。また $l \leftrightarrow m'$ は (9) 式の u' の表示の中で、 l' を m' に、 m' を l' に変更することを意味する。

さて外部解の速度 \mathcal{P} の共通領域における形は、壁がないときの場合⁵⁾と同じように計算して、つぎのようになる。

$$\mathcal{P} = W(s_1) + \left[4C(s_1) \cos \phi \left(\log P - \log 2 + \frac{1}{2} \right) \right] \pi + 2C(s_1) \sin \phi \left\{ (\log P - \log 2) \mathcal{E}_{x'} - (P \cdot \mathcal{E}_{x'}) P / P^2 \right\} + K(s_1) + \mathcal{P}''(s_1), \\ \text{ここで} \quad K(s_1) = \left\{ \int_{s_0}^{s_1-\varepsilon'} + \int_{s_1+\varepsilon'}^{s_2} \right\} \left[-C(s) \left\{ \frac{l'(s)}{R} + \frac{(l'(s) \cdot R)}{R^3} R \right\} ds \right] - 4C(s_1) \cos \phi \\ \times (\log \varepsilon') \pi - 2C(s_1) \sin \phi (\log \varepsilon') \pi - 2C(s_1) \sin \phi (\log \varepsilon') \mathcal{E}_{x'}. \quad (12)$$

また $\mathcal{P}''(s_1)$ は、(9)~(11) の x, y, z として、 s_1 の x, y, z 座標を代入すれば得られる。(12) 式の中で、 P は $\vec{QP} = P$ (今考えている共通領域の点 P とし、 P から物体までの最短距離の点と Q とした) で与えられ、 π は接線方向の単位ベクトル、 $\mathcal{E}_{x'}$ は x' 方向の単位ベクトル (x' 方向は $l'(s)$ を π に直角な面

に射影したときに得られる方向)、中は $R(s)$ と θ とのなす角、 ε' は $\lambda \gg \varepsilon' \gg \rho$ とみたす微小量である。

つぎに内部解は壁がないときの内部解^{5), 6)} と同一であるから、壁がないときの場合をそのまま用いることができる。

ここで外部解及び内部解の共通領域におけるマッチングを壁がない場合⁵⁾ と同様に行い、

$$C(s) R'(s) = \frac{A(s)}{4} \pi + \frac{I(s)}{2} R_1 + \frac{J(s)}{2} \theta, \quad (13)$$

$\left(\begin{array}{l} \pi \text{ は } s \text{ における接線方向の単位ベクトル、 } R_1, \theta_1 \text{ は } \pi \text{ に} \\ \text{直角な面内において互に直交する単位ベクトルで、以下} \\ \text{の解析に都合のよい方向をとってよ} \end{array} \right)$

とおくとき、 $A(s)$, $I(s)$, $J(s)$ に対するつぎのような積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & A\left(\lambda' - \frac{1}{2} - \log a_1\right) \pi + \left[\left(\lambda' + \frac{1}{2} - \bar{b}_1(R_1) - \log a_1\right) I - C_1(R_1) J\right] R_1 \\ & + \left[-C_1(R_1) I + \left(\lambda' + \frac{1}{2} + \bar{b}_1(R_1) - \log a_1\right) J\right] \theta_1 + U_b(s) - U(s) = K(s) + \mathcal{Q}''(s), \end{aligned}$$

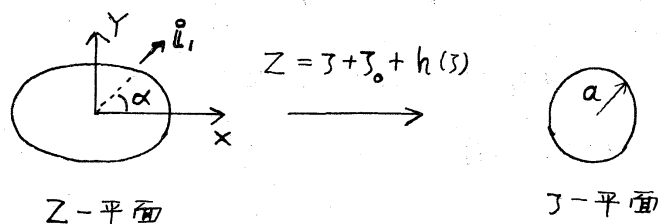
ここで $\lambda' = \log(2\lambda/b)$,

$$K(s) = \left\{ \int_{s_0}^{s-\varepsilon'} + \int_{s+\varepsilon'}^{s_2} \right\} \left[-\frac{\frac{A}{4}\pi + \frac{1}{2}(IR_1 + J\theta_1)}{R} - \frac{\left\{ \frac{A}{4}(R \cdot \pi) + \frac{I}{2}(R \cdot R_1) + \frac{J}{2}(R \cdot \theta_1) \right\} R}{R^3} \right] ds' \quad (14)$$

$$- (A\pi + IR_1 + J\theta_1) \log \varepsilon'$$

であり、 $\mathcal{Q}''(s)$ は (9) ~ (11) の x, y, z に s の (x, y, z) 座標を代入すればよい、また $a_1, \bar{b}_1(R_1), C_1(R_1)$ は物体の断面の形によって

変化する。いま物体の断面形を Z 平面上でえがき、この断面形が寫像関数 $Z = z + z_0 + h(z)$ によって J 平面上の半径 a の円に寫像されるとするとき、 $a, b, (l_1), c, (l_1)$ は以下の形となる。



第 2 図

$$a_1 = \frac{a}{b}, \quad \bar{b}_1(l_1) = -\frac{\delta}{2} \cos(\beta + 2\alpha), \quad c_1(l_1) = \frac{\delta}{2} \sin(\beta + 2\alpha)$$

$$re^{i\beta} = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{h(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta} h'(ae^{i\theta})}{e^{i\theta} \{1 + h'(ae^{i\theta})\}} d\theta \quad (15)$$

(14) 式をとりて A, I, J が決定されるとき、 ds 部分に働く力 $f ds$ は

$$f = 2\pi\mu U_0 A \pi + 4\pi\mu U_0 (I l_1 + J \bar{l}_1) \quad (16)$$

で与えられ、物体に働く力 F 及び原点のまわりのトルク G は

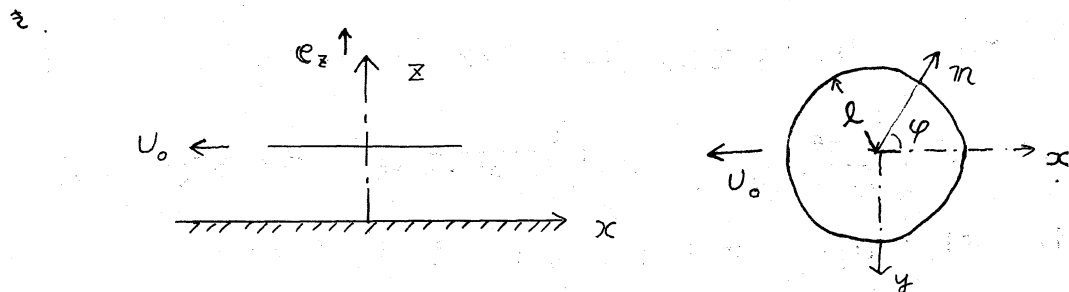
$$F = l \int_{s_0}^{s_2} f ds, \quad G = l^2 \int_{s_0}^{s_2} r(s) \times f ds \quad (17)$$

で与えられる。

§3. 一様な断面をもつリンクの運動

つぎの 4 つの場合について、積分方程式の厳密解が容易に得られる。

(i) 壁に平行な面内にある一様なリンクが壁に平行に動くとき



第 3 図

上図のように座標軸をえらび、半径 l のリンクが U_0 で x 軸の負方向に動く場合について考へる。

断面が一様な仮定から $\log a_1 = 0$ ととる。 $\ell_1 = n$, $\beta_1 = e_z$ と
 として、(14) の A , I , J に対して

$$\left. \begin{aligned} A &= -\sin \varphi \bar{A}, & I &= \cos \varphi \bar{I}, & J &= \cos \varphi \bar{J} \\ \bar{A}, \bar{I}, \bar{J} &\text{ --- 定} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

を仮定し、(8) ~ (11), (14) を用いて $|K|$, \mathcal{G}'' を求めるとき、

$$|K| = -\sin \varphi \pi \left[\bar{A} \left(-2 \log 2 + \frac{3}{2} \right) - 2 \bar{I} \right] + \cos \varphi \pi \left[\bar{I} \left(-2 \log 2 + 1 \right) - \bar{A} \right] + \cos \varphi e_z \bar{J} \left(-2 \log 2 + 2 \right) \quad (19)$$

$$\mathcal{G}'' = -\sin \varphi \pi \left[\bar{A} D_1 + \bar{I} D_2 + \bar{J} D_3 \right] + \cos \varphi \pi \left[\bar{A} E_1 + \bar{I} E_2 + \bar{J} E_3 \right] + \cos \varphi e_z \left[\bar{A} H_1 + \bar{I} H_2 + \bar{J} H_3 \right] \quad (20)$$

となり、 D_1, \dots, H_3 は第 1 種から第 2 種の完全楕円積分 K , E の
 関数としてつぎの如く表示される。

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{(1+3d^2)}{\sqrt{1+d^2}} \left[(1+2d^2)K - 2(1+d^2)E \right], & E_1 &= \frac{1}{\sqrt{1+d^2}} \left[\left(1 + \frac{13}{2}d^2 + 6d^4 \right) E - d^2 \left(\frac{1}{2} + 6d^2 \right) K \right] \\ H_1 &= \frac{d}{2\sqrt{1+d^2}} \left[2d^2 K - (1+2d^2)E \right], & D_2 &= 2E_1 \\ E_2 &= \frac{1}{2(1+d^2)^{3/2}} \left[(2+9d^2+32d^4+24d^6)K - (1+19d^2+44d^4+24d^6)E \right] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$H_2 = \frac{d}{2(1+d^2)} \frac{1}{2} \left[(1+7d^2+4d^4)E - d^2(5+4d^2)K \right], \quad D_3 = -2H_1,$$

$$E_3 = -H_2, \quad H_3 = \frac{1}{2(1+d^2)} \frac{1}{2} \left[(2+3d^2)K - (1+3d^2)E \right],$$

$$\therefore \text{ここで } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad k = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}}$$

(19), (20) を (14) に代入するとき、 \bar{A} , \bar{I} , \bar{J} が

$$\bar{A} = A_{11} + A_{12}, \quad \bar{I} = A_{21} + A_{22}, \quad \bar{J} = A_{31} + A_{32} \quad (22)$$

のようになる。ここで A_{ij} はつききのマトリックス T の逆マトリックス T^{-1} の成分である。

$$T = \begin{pmatrix} S-2-D_1 & 2-D_2 & D_3 \\ 1-E_1 & S-\frac{1}{2}-\bar{b}_1-E_2 & -c_1-E_3 \\ -H_1 & -c_1-H_2 & S-\frac{3}{2}+\bar{b}_1-H_3 \end{pmatrix} \quad (23)$$

(23) 式で $S = \log(8\ell/a)$ であり、また a , $\bar{b}_1(\ell)$, $c_1(\ell)$ は (15) を用いて計算できる。(16), (17) より物体に働く力 F の x 成分 F_x は

$$F_x = \pi L \mu U_0 (A_{11} + A_{12} + 2A_{21} + 2A_{22}) \quad (24)$$

で表わされる。ここで $L (=2\pi\ell)$ は全長である。(22) ~ (24) で表わされる積分方程式の厳密解はかなり複雑である。壁効果がどのような影響を及ぼすかの大体の模様を知るためには、この解を $\varepsilon = 1/\lambda' = [\log \frac{2\ell}{a}]^{-1}$ で展開し、 $O(\varepsilon^3)$ を省略した解を調べればよい。この解は

$$F_x = \frac{3\pi L \mu U_0}{S + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \bar{b}_1 - R_1(d)} \quad (25)$$

の形となる。ここで $R_1(d)$ は壁の影響を示す項で

$$R_1(d) = \frac{1}{3(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(1+d^2-8d^4-6d^6)E + (3+d^2+5d^4+6d^6)K \right] \quad (26)$$

で表わされる。(25), (26) は、 $d \ll 1$ のときには、リングの各素片があたかも二次元物体の1部分を構成してゐると考へて計算した場合に予想されるような抵抗の増加を示し、 $d \gg 1$ のときには、リング全体を三次元物体とみなしきときに期待されるような抵抗の増加を示す。

さて(22)で計算される \bar{J} は0でないから、リングを構成する各要素は互方向の力を受ける。この力は $\cos \varphi$ に比例する形となつてゐるから、互方向の合力(揚力)は0となるが、y軸のまわりにトルク G_y を受ける。このトルク G_y は

$$G_y = -4\pi\mu U_0 l^2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi J d\varphi = -4\pi\mu U_0 l^2 (A_{31} + A_{32}) \quad (27)$$

ここで A_{31} , A_{32} の一般形は複雑な形をしてゐるから、 $O(\varepsilon^3)$ 以上を省略した形で定性的な性質を調べてみることにする。このとき

$$G_y = - \frac{4\pi\mu U_0^2 l (C_1 + H_1 + H_2)}{S^2} \quad (28)$$

となる。ここで

$$H_1 + H_2 = \frac{d^3}{2(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2(2+d^2)E - (3+2d^2)F \right] \quad (29)$$

であり、 $H_1 + H_2 < 0$ であると考えられる。このため $C_1 = 0$ の場合 (断面形が進行方向に依りて対称な形をしてゐるとき) には、リングは壁効果のため $G_y > 0$ であるようなトルクを受けるとなる。

(ii) 壁に平行な面内にある一様なリングが壁に直角に動くとき

第3図のように座標軸をえらび、リングの速度を $(0, 0, -V_0)$ とする。(14) の $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{g}_1 = \pi$ ととって、 $A = 0$, $I = \text{const}$, $J = \text{const}$ を仮定するとき、

$$\mathbf{K} = (3 - 2 \log 2) J \pi - 2 \log 2 I \mathbf{e}_z, \quad (30)$$

$$\mathbf{q}'' = (E_4 I + E_5 J) \pi + (H_4 I + E_4 J) \mathbf{e}_z \quad (31)$$

が得られる。ここで

$$\left. \begin{aligned} E_4 &= \frac{d}{2(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(1-d^2)E + d^2 K \right], & E_5 &= \frac{1}{2(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(2+11d^2+8d^4)K - (5+15d^2+8d^4)E \right] \\ H_4 &= \frac{1}{2(1+d^2)^{\frac{3}{2}}} \left[(3+5d^2)E + (2+d^2)K \right] \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

である。(26), (27) を (14) に代入し、(i) の場合と同じように計算するとき、リングに働く方向の力 F_z は

$$F_z = \frac{4\pi\mu V_0 L (S - \frac{5}{2} + \bar{b}_1 - E_5)}{S^2 - (2+H_4+E_5)S - \frac{5}{4} + 3\bar{b}_1 - \bar{b}_1^2 + (\frac{5}{2} - \bar{b}_1)H_4 - (\frac{1}{2} - \bar{b}_1)E_5 + H_4 E_5 - (C_1 + E_4)^2} \quad (33)$$

のように決定できる。また $O(\varepsilon^3)$ を省略するとき (33) は

$$F_z = 4\pi\mu V_0 L / (S + \frac{1}{2} - \bar{b}_1 - H_4) \quad (34)$$

となり、(34) 式は $d \ll 1$, $d \gg 1$ において定性的に (i) においてのべられたと同じ性質を示す。

(iii) 壁に平行な面内にあるリンクが面内で回転するとき

第3図においてリンクは z 軸のまわりを角速度 $-\omega$ で回転してゐるとする。長さを l で、速度は $l\omega$ で無次元化する。

$A = \text{const.}$, $I = J = 0$ の解があり

$$K = A \pi \left(-2 \log 2 + \frac{3}{2} \right), \quad \mathcal{F}'' = A D_4 \pi \quad (35)$$

となる。ここで

$$D_4 = \frac{1}{\sqrt{1+d^2}} \left[-2(1+d^2)E + (1+2d^2)K \right] \quad (36)$$

である。これらの式を (14) に代入して A を求め、さらに (16)、(17) よりリンクに働く z 軸のまわりのモーメント G_z を計算するとき、次式のようにきまる。

$$G_z = 2\pi\mu l^2\omega \cdot L / (5-2-D_4) \quad (37)$$

(iv) 壁に平行な面内にあるリンクが面に直角に回転するとき

第3図においてリンクが y 軸のまわりを $-\omega$ で回転する場合を考える。 $\hat{l}_1 = \hat{e}_z$, $\hat{r}_1 = r\hat{e}_1$ ととり、(i) の場合と同じく A, I, J に対し (18) を仮定する。このとき K, \mathcal{F}'' に対する式として、(19)、(20) において I と J を入れかえた式が得られる。これを (14) に代入し、(i) の場合と同じような計算をして、 y 軸のまわりのモーメント G_y がつきのように得られる。

$$G_y = 2\pi\mu l^2 \omega_0 L A_{22} \quad (38)$$

ここで A_{ij} は次のマトリックス T の逆マトリックス T^{-1} の成分である。

$$T = \begin{pmatrix} S-2-D_1 & -D_3 & 2-D_2 \\ -H_1 & S-\frac{3}{2}-\bar{b}_1-H_3 & -G-H_2 \\ 1-E_1 & -G-E_3 & S-\frac{1}{2}+\bar{b}_1-E_2 \end{pmatrix} \quad (39)$$

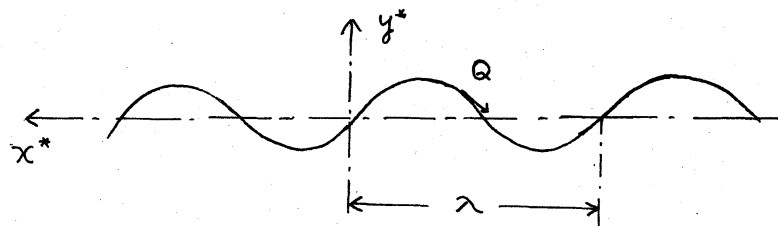
また $O(\varepsilon^3)$ 以上を省略するとき

$$G_y = 2\pi\mu l^2 \omega_0 L / (S - \frac{3}{2} - \bar{b}_1 - H_3) \quad (40)$$

が得られる。

§4. 微小な生物の平面波動運動

ここでは無限に続く細長い物体を考える。その断面の形は任意であるが、長さの方向にわたっては一樣であると仮定する。第4図の如く座標系を考えて、物体が $y^* = \eta^* \sin k(x^* - Ut^*)$



第4図

で示される平面波動運動をしながら V_A^* の速度で x^* の負の方向に進んでいるとする。長さは $1/k$ で、また速度は U で無

次元化し、無次元量で表わす。いま座標系として波の伝播速度 U で動いてる座標系を考へるとき、物体の形は

$$y = \eta \sin x \quad (41)$$

で表わされ、時間的に物体の形は変わらない。このことはこの座標系からみたとき物体の速度が常に接線方向であることを意味し、しかも物体がのび縮みしないことを仮定するとき、場所にもよらない一定の速度 Q をもつことを意味する。この Q は x 方向への射影速度の平均値が 1 であることから、

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \eta^2 \cos^2 x} \, dx \quad (42)$$

のようになる。また定常運動の解として、物体に働く力の一波長平均が 0 でなければならぬ。すなわち

$$\overline{F} = \frac{2\pi\mu U}{\rho} \int_0^{2\pi} (A\eta + 2I\eta_1 + 2J\eta_2) \sqrt{1 + \eta^2 \cos^2 x} \, dx = 0 \quad (43)$$

をみたす必要がある。

さきに考へられた伝播速度 U で動いてる座標系では無限遠点の流れの速度 V_∞ は未定である。この速度 V_∞ が (43) 及び (14) をみたす条件のもとで決定せられるとき (このとき壁の速度は V_∞ と同一速度になるように η' が考慮されている)、物体は x の負の方向に $V_A = 1 + V_\infty$ の速度で進むことに

なる。

さて上記のような平面波動運動において、 $O(\eta^3)$ を省略するとき、積分方程式 (14) の厳密解が容易に得られる。以下において二つの場合についてこの解を求める。

(i) Case I: 壁に平行な面内で波動運動をするとき



第 5 図

第 5 図の如く座標軸をとり、(14) の A, I, J に対し

$$A = -b\eta + 2a'\cos 2x, \quad I = -b'\cos x, \quad J = 2e\sin 2x \quad (44)$$

を仮定する。ただし b' は $O(\eta)$ の定数、 a', e は $O(\eta^2)$ の定数とする。(44) を (8) ~ (14) に代入するとき、 IK, η'' はそれぞれつぎのようにな決定される。

$$IK = \left[2a'(\delta + \log 2) \cos 2x + \frac{\eta b'}{2} \{1 - \delta + (1 + \delta) \cos 2x\} \right] e_x - b'\delta \cos x e_y + 2e \log(2\delta) \sin 2x e_z, \quad (45)$$

$$\eta'' = \left[-\frac{b'\eta}{4} F_2(d) + \cos 2x \left\{ \frac{b'\eta}{4} (F_2(d) + F_4(d)) \right\} + \frac{a'}{2} F_3(d) - \delta d^3 e F_5(d) \right] e_x - \frac{b'}{2} \cos x F_1(d) e_y + \sin 2x \left[-\delta d^3 \left(\frac{a'}{2} + \frac{b'\eta}{4} \right) F_5(d) + 3b'\eta d^3 F_6(d) + e F_7(d) \right] e_z, \quad (46)$$

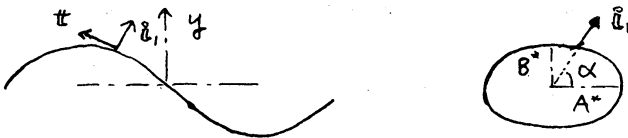
ここで e_x, e_y, e_z は x, y, z 方向の単位ベクトル、 δ はオイラーの定数で、 $F_1(d), \dots, F_7(d)$ は変形ベッセル関数 $K_n(d)$ を用いてつぎのように表わすことができる

$$\left. \begin{aligned} F_1(d) &= 2 [K_0(2d) + d K_1(2d)] , & F_2(d) &= 2 [K_0(2d) - d K_1(2d)] \\ F_3(d) &= 4 [K_0(4d) - 4d K_1(4d) + 4d^2 K_2(4d)] , & F_4(d) &= -8d [K_1(4d) - 2d K_2(4d)] \\ F_5(d) &= \frac{2}{d} K_1(4d) , & F_6(d) &= \frac{1}{6d^2} [K_2(2d) - 4K_2(4d)] , & F_7(d) &= 2 [K_0(4d) + 2d K_1(4d)] \end{aligned} \right\} (47)$$

(44) の形は (43) をすてにみたしてゐるから、(45)、(46) を (14) に代入して得られる 4 つの方程式 (λ によらない項、 $\cos \lambda$ の係数、 $\cos 2\lambda$ の係数、 $\sin 2\lambda$ の係数をそれぞれ 0 とおく) から a 、 b 、 c 、 V_∞ を決定することができ、このようにしてきめられた V_∞ を用いて微小な生物の前進速度 V_A は

$$V_A = 1 + V_\infty = \frac{\eta^2}{2} \frac{\lambda' - \frac{1}{2} - \delta + \bar{b}_1(l_1) - \frac{1}{2} F_2(d)}{\lambda' + \frac{1}{2} - \delta - \bar{b}_1(l_1) - \frac{1}{2} F_1(d)} \quad (48)$$

のようになる。ここで $\lambda' = \log(\frac{2}{a\pi}) = \log(\lambda/a\pi)$ (λ は波長)、 a と $\bar{b}_1(l_1)$ とは物体の断面の形によつて変わり、断面の形が



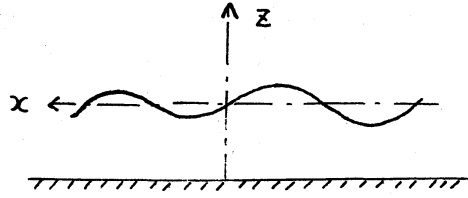
第 6 図

第 6 図に示される楕円のときには、

$$a = \frac{A^* + B^*}{2} , \quad \bar{b}_1(l_1) = - \frac{A^* - B^*}{2(A^* + B^*)} \cos(2\alpha)$$

となる。また $F_1(d)$ 、 $F_2(d)$ の項は壁の影響を表し、(47) で与えられてゐる。

(ii) Case II : 壁に直角方向に振動するとき



第 7 図

第 7 図の如く、 x - z 平面で波動運動をする場合で、この場合は Case I と比較してやや複雑となる。いま

(14) の A, I, J に対し

$$A = -b'\eta + e \sin x + 2a' \cos 2x, \quad I = -b' \cos x + 2h \sin 2x, \quad J = 0 \quad (49)$$

を仮定し、 b', e は $O(\eta)$ の定数、 a', h は $O(\eta^2)$ の定数とする。 (i) の場合と同じようにして K, q'' を計算するとき、

$$K = \left[\frac{b'\eta}{2} \{ (1-\delta) + (1+\delta) \cos 2x \} + 2a' \cos 2x (\delta + \log 2) + e \delta \sin x \right] e_x \\ + \left[-b' \delta \cos x + 2h \delta \sin 2x + \frac{1}{4} e \eta (-1 + 2\delta + 3 \log 2) \sin 2x \right] e_z, \quad (50)$$

$$q'' = \left[\frac{b'\eta}{4} H_1 - 2d^2 b' K_1(2d) + \frac{e}{4} d \eta (H_2 - \frac{1}{d^2}) + \frac{e}{4} \sin x H_3 + \cos 2x \left\{ \left(\frac{a'}{2} + \frac{b'\eta}{4} \right) H_5 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e}{4} d \eta (H_2 + H_6) + \frac{b'\eta}{4} (-H_1 + H_7) - 16d^2 K_1(4d) \left(h + \frac{1}{8} e \eta \right) \right\} \right] e_x \\ + \left[\cos x \left\{ e d^2 K_1(2d) - \frac{b'}{2} H_4 \right\} + \sin 2x \left\{ -16d^2 K_1(4d) \left(\frac{a'}{2} + \frac{b'\eta}{4} \right) - \frac{e\eta}{8} (H_8 + H_9) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b'\eta}{2} d (H_{10} + H_{11}) + \left(h + \frac{1}{8} e \eta \right) H_{12} \right\} \right] e_z$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= -2(1-2d^2) K_0(2d) - 2d K_1(2d), & H_2 &= 4K_0(2d) - \frac{2}{d}(1+d^2) K_1(2d) \\ H_3 &= 4(1+d^2) K_0(2d) - 4d K_1(2d), & H_4 &= 2(1+2d^2) K_0(2d) + 6d K_1(2d) \\ H_5 &= 4 \left\{ (1+4d^2) K_0(4d) - 6d K_1(4d) \right\}, & H_6 &= 16 K_0(4d) - \frac{4}{d}(1+4d^2) K_1(4d) \\ H_7 &= -4(1+8d^2) K_0(4d) + 8d K_1(4d), & H_8 &= 2(1+2d^2) K_0(2d) - 2d K_1(2d) \\ H_9 &= -4(1-8d^2) K_0(4d) - 8d K_1(4d), & H_{10} &= 4 K_0(2d) + \frac{2}{d}(2+d^2) K_1(2d) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$H_{11} = 4K_0(4d) + \frac{2}{d}(1+8d^2)K_1(4d), \quad H_{12} = 2(1+8d^2)K_0(4d) + 12dK_1(4d) \quad)$$

のように求まる。いま (50), (51) を (14) に代入して得られる 5 つの方程式から、 a', b', e, h, V_∞ を決定することが出来る。このようにして定められた V_∞ を用いて、 V_A はつぎのようになる。

$$V_A = \frac{\eta^2 (\lambda' - \frac{1}{2} - \delta - \frac{1}{4}H_3)(\lambda' - \frac{1}{2} - \delta + \frac{1}{2}H_1 + \bar{b}_1) - dK_1(2d)(d^2H_2 - 1)}{2 (\lambda' - \frac{1}{2} - \delta - \frac{1}{4}H_3)(\lambda' + \frac{1}{2} - \delta - \frac{1}{2}H_4 - \bar{b}_1) - 2d^2K_1^2(2d)} \quad (52)$$

(iii) 線虫の運動の観測値との比較

実際の微小な生物の運動においては、その長さは無限に続くのではなく一波長から二波長位にとどまることが多い。このように長さが有限のときには積分方程式 (14) は厳密解を求めることがむづかしく、 ε による展開でとかねばならない。 $O(\varepsilon^3)$ を省略するとき、このような解が求められる。^{7), 8)} その解を用いて、無限に続く場合の前進速度と長さが有限である場合の前進速度を比較することが出来る。この比較によれば、一波長か二波長程度の長さの波動運動による速度は、無限に続くときと比較して数%程度小さくなる。現在の観測精度から考えられれば、この程度の誤差はあまり問題とならないので、実際の観測結果との比較に、長さが無限に続く場合の結果を用いることにする。

現在考えられている線虫の平面波動運動の観測値では、

η は 1 程度である。 η が 1 付近である場合の前進速度は、近似的につぎのようにして (48) 及 (52) から構成される。(48)、(52) の η^2 を $f(\eta)$ で置きかえる。この $f(\eta)$ は $\lambda' \rightarrow \infty$ ときに η の前進速度に及ぼす影響を与える関数とする。そのとき $f(\eta)$ は次式で与えられる。

$$f(\eta) = \int_0^{2\pi} \frac{\eta^2 \cos^2 x}{(1 + \eta^2 \cos^2 x)^{\frac{1}{2}}} dx \bigg/ \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\eta^2 \cos^2 x}{(1 + \eta^2 \cos^2 x)^{\frac{1}{2}}} dx \quad (53)$$

この式は $\eta \sim 1$ で

$$f(\eta) = \eta^2 / (1 + \eta^2) \quad (54)$$

で置きかえてよい⁸⁾。このようにするとき (48) と (52) は

$$\text{Case I:} \quad V_A = \frac{\eta^2}{2(1+\eta^2)} \frac{\lambda' - \frac{1}{2} - \delta + \bar{b}_1(\bar{a}_1) - \frac{1}{2}F_2(d)}{\lambda' + \frac{1}{2} - \delta - \bar{b}_1(\bar{a}_1) - \frac{1}{2}F_1(d)} \quad (48')$$

$$\text{Case II:} \quad V_A = \frac{\eta^2}{2(1+\eta^2)} \frac{(\lambda' - \frac{1}{2} - \delta - \frac{H_3}{4})(\lambda' - \frac{1}{2} - \delta + \frac{H_1}{2} + \bar{b}_1) - d k_1(2d)(d^2 H_2 - 1)}{(\lambda' - \frac{1}{2} - \delta - \frac{H_3}{4})(\lambda' + \frac{1}{2} - \delta - \frac{H_4}{2} - \bar{b}_1) - 2d^4 k_1^2(2d)} \quad (52')$$

のようになる。(48') または (52') は、 η が 1 とくくべて太きるときには精度のよい結果が期待できず、 η が 1 付近ではよい精度の結果が期待できる。(48) と (52) が有効な η の範囲 ($\eta < 0.5$) に比較的近い $\eta \sim 1$ 付近ではよい精度の結果が期待できる。

さて線虫の運動に対する観測結果⁸⁾と、計算結果を比較して見よう。まず観測値として、振幅 η 、断面の太さ a の尺度 ω と波長 λ の比、前進速度 $(V_A)_{ob}$ を、つぎに計算値として、

上記の η , a/λ を用い、壁が有りとしかつ断面が円 ($b_1=0$)
として計算したときの前進速度 V_{A0} と、最後に $(V_A)_{ob}/V_{A0}$ を
表 I に示す。表 I で示されるように観測値の方が計算値より

表 I

	η	a/λ	$(V_A)_{ob}$	V_{A0}	$(V_A)_{ob}/V_{A0}$
例 1	0.77	0.029	0.37	0.122	3.03
例 2	0.93	0.016	0.24	0.166	1.45
例 3	1.07	0.021	0.305	0.184	1.66

も大きくなっている。この観測値と計算値のずれを壁効果及び断面の変形によつてどの程度説明できるかを試みて見よう。

まず壁効果の影響を見るため、断面は円として (48') 及び (52')
を用いて計算された V_A と壁が有りとして計算された V_{A0} との
比を第 8 図に示す。この図からつぎのことが分る。観測され
た運動が Case II のような運動をしているときには、観測値は
、例 1 を除いて、断面を円として壁効果で説明できそうであ
るが、Case I のような運動をしているときには、観測値は説
明できそうになり、いま線虫の運動において、波長 λ と振幅
 η などを観測するためには Case I のように運動していると
考える方が都合と思われる。したがって観測値を、Case I の
ような運動をしていると仮定して説明しようとするときには、
壁の影響だけでは不十分で、物体の変形を考慮する必要がある

る。いま試みに Case I で物体の断面を楕円とし、しかも長軸の長さが短軸の長さの3倍であるような楕円と仮定しよう。このとき (48') でどのような結果が得られるかを第9図に示す。此の図から、物体の断面が上述のような楕円に変形してゐると考へるときには、観測値の例2、例3は、壁からの距離 d が $d/\lambda \sim 0.1$ をみたす位置を運動してゐると考へて、(48') 式で説明できようと思はれる。

さて線虫が壁からどの程度離れて運動してゐるかの観測資料は得られてないから、実際にはどの程度円から変形してゐるかを予測することはむづかしい。もし $d/\lambda < 0.1$ のところを運動してゐるなら、円からの変形はもっと少なくてよいと考へてよい。

§5. まとめ

細長い物体のおそり運動に対する壁の影響を調べるために、リングの運動と微小な生物の平面波動運動の二つの運動の壁効果を積分方程式の厳密解を求めて研究した。

リングの並進運動や回転運動に対する壁効果の研究は実用的な面ではレオロジーの分野でその利用が期待される。また微小な生物の平面波動運動に対する壁効果の研究は、線虫などの運動の観測結果と従来の計算結果⁸⁾のつれまどの程度説

明であるかを説明するために必要な研究である。上記のよう
な必要性の他に、本稿の研究は積分方程式の厳密解として精
度のよい解が得られてゐることに価値がある。その理由がつ
ぎのことにある。一般の場合、上にのべられた積分方程式は
厳密解をみつけることがむづかしく、その展開によつてとが
れねばならぬ。その展開によつてとがれた解の精度を知る
ために、これらの厳密解は有用な役割を果たすことが期待され
る。

リングの壁に平行な運動において、リングにトルクが働く
ことがさるで知られた。このことは定性的には、ストーク
ス源が周囲の物体にどのような力を及ぼすかを、壁の存在を
考慮して議論することによつても理解することができる。こ
れを微小な生物の運動に対してこのような定性的議論を試みて
みよう。頭部と有限の長さの尾部(ペンモ)をもつ微小な生物
が壁の近くで平面波動運動をしながらい壁に平行に進んでゐる
とする。頭部と尾部をストークス源でおきかえ、上述のよう
な定性的考察をすることによつて、この物体は揚力、しかも
壁の方へ物体を近づけるような揚力をうけることが分る(頭
部と尾部は方向反対のストークス源でおきかえられることに
注意せよ。リングの場合にトルクが働き、微小な生物の場合
に揚力が働く原因はこの点にある)。このような揚力の存在

は、うにの精虫のような頭部をもつ微小な生物が、壁の近くに長く滞在したまま前進運動をつづけることを予想させる。

§4の微小な生物の平面波動運動のところで、観測結果をうまく説明するためには、物体の断面が円から楕円に変形していると考えた方がよいことがのべられた。しかし円からどの程度変形していると考えれば、物体がどの程度壁に近づいて運動しているかによつてきまつてくるものと思われる。§4の表Iでのべられた線虫の運動が壁からどの程度離れた位置で運動しているかについての観測資料は得られてないから、どの程度の変形が妥当かを推測することはむづかしい。しかし第9図を見て大雑把な推論をするならば、Case Iのように運動していると考え、 $d/\lambda \sim 0.1$ 付近を運動していると仮定するときには、長軸と短軸の比がどの程度の楕円、 $d/\lambda < 0.1$ と仮定するならば、円からの変形はそれほど少なくてよいものと思われる。

また頭部と有限な長さの尾部（平均して1.3波長程度）をもつうにの精虫の運動の観測結果と頭部と尾部の干渉、壁の影響、物体断面の変形を考慮した計算結果（積分方程式の厳密解ではない。とによる展開の解）とを比較した場合にも、断面の変形について上述と同じような結論が得られている。⁷⁾

さて細長い物体は全体としての体積が非常に小さいため、

物体が存在しなかったとき存在すると考えられる速度場をみたすことが示され。しかしこれらば物体表面のすぐ近傍(表面から $O(k)$ 程度の距離のところ、すなわち内部領域)で速度が急速に変化し、物体表面の境界条件をみたすことになる。

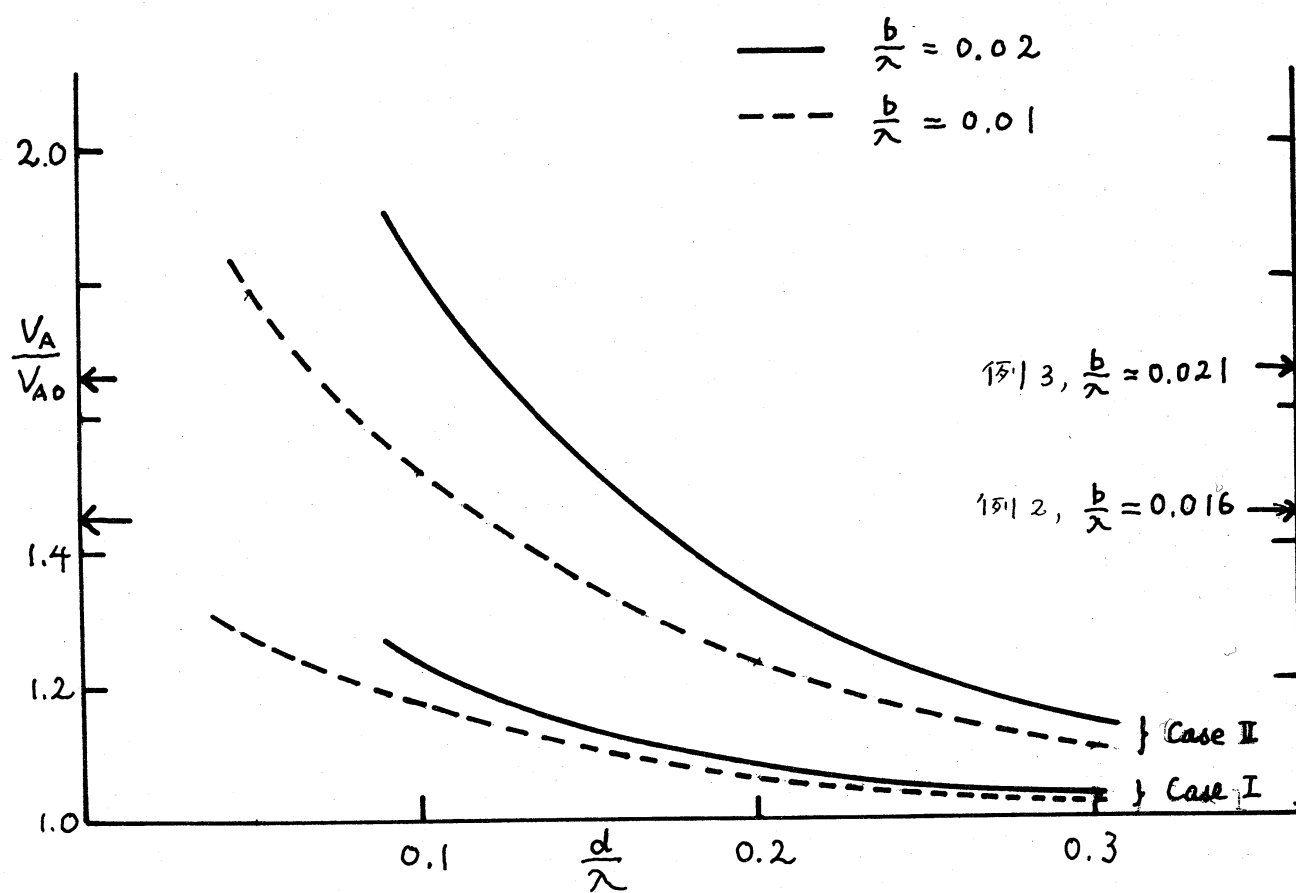
これは一種の境界層と考えてよく、したがって物体表面に働く粘性応力並びに表面圧力は $O(\mu_0/k)$ で、 k が分母であるため普通のレイノルズ数の流れで予想される粘性応力、圧力に比して、大きい力が働くことになる。このような力が表面に働くことが、断面の変形の原因の1つ(流体力学的原因)であつてもよいように思われる。

文 献

- 1) N.J. De Mestre : J. Fluid Mech. 58 (1973), 641
- 2) D.F. Katz, J.R. Blake & S.L. Pareri-Fonta : J. Fluid Mech. 72 (1975), 529
- 3) A.J. Reynolds : J. Fluid Mech. 23 (1965), 241
- 4) D.F. Katz : J. Fluid Mech. 64 (1974), 33
- 5) 成瀬文雄: 散理解析研講究録 302 (1977), 58
- 6) 成瀬文雄: 散理解析研講究録 234 (1975), 4
- 7) 成瀬文雄: 物理学会第32回年会予稿集 4, 3 (1977)
- 8) G.J. Hancock : Proc. Roy. Soc. A 217 (1953), 96

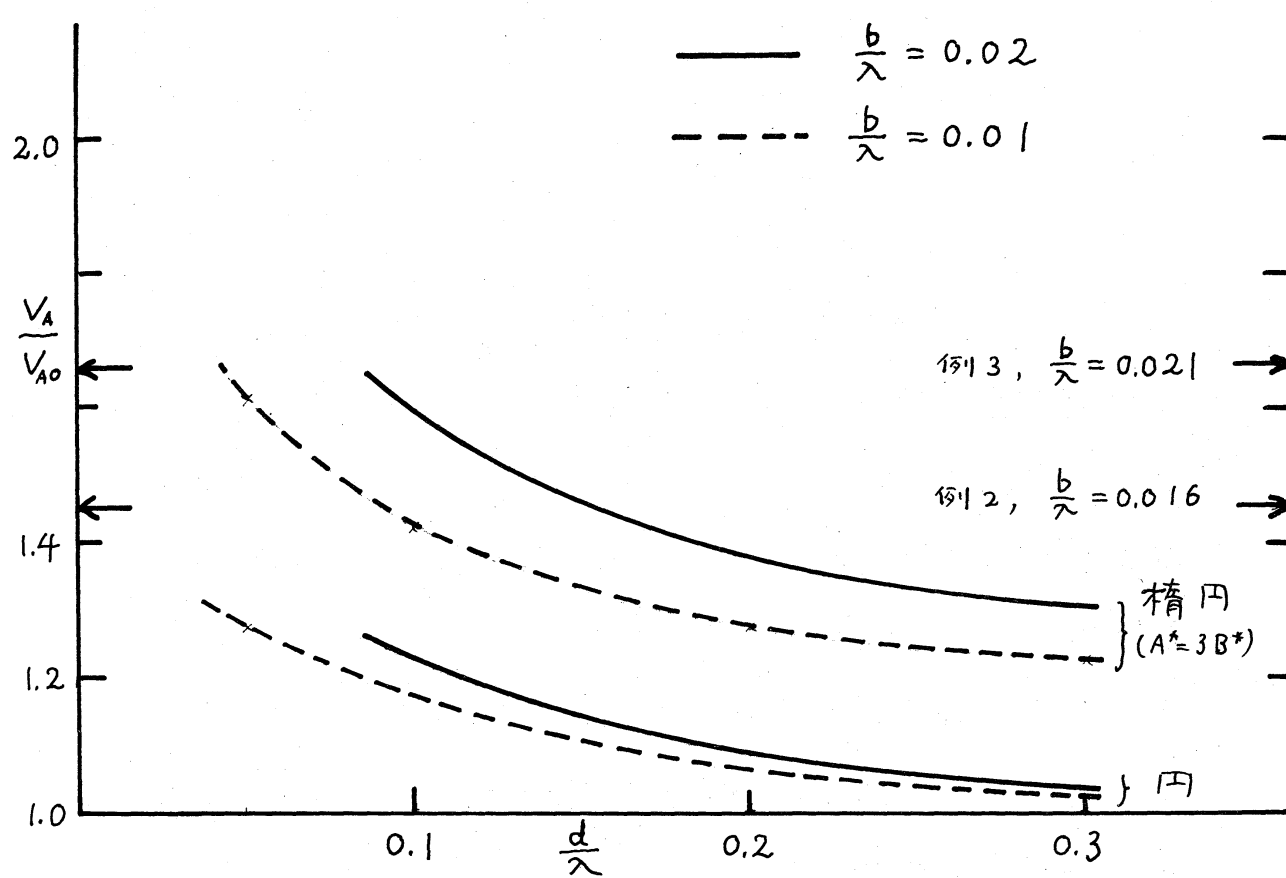
断面 IV

Case I , Case II



第 8 图

断面円，橢円 ($A^* = 3B^*$) Case I



第 9 図